Einheitsganglinien-Verfahren

Themen:

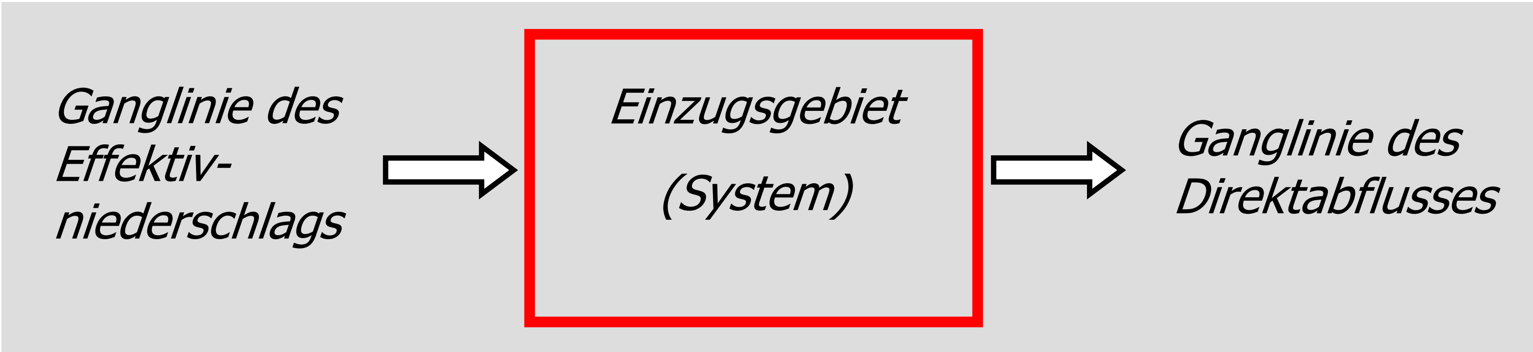
- Wiederholung von Grundlagen der Impulsantwortverfahren
- Definition der Einheitsganglinie
- Beispiel: Rechnen mit einer gegebenen Einheitsganglinie
- Übersicht: Methoden zur Bestimmung der Einheitsganglinie

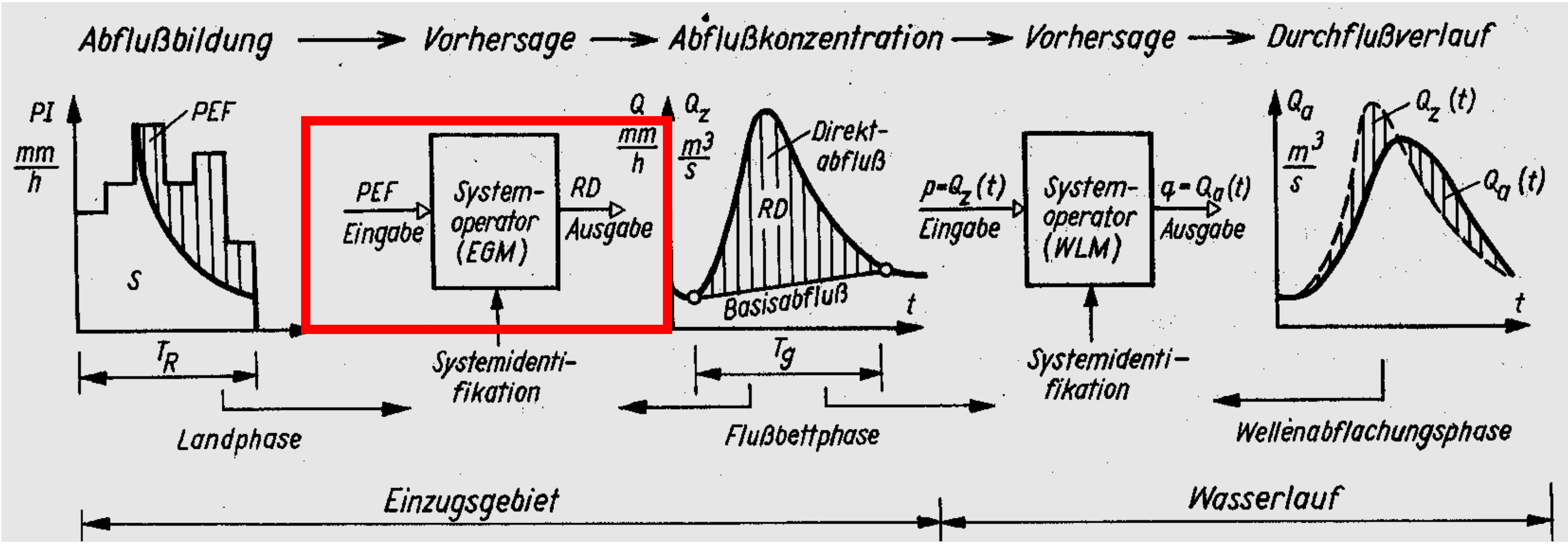
Literatur:

- Dyck & Peschke (1995): Grundlagen der Hydrologie; Verl. f. Bauwesen
- Vorlesungsskript Hydrologie 1, Uni BW München, Prof. M. Disse
- Manuskript zur Vorlesung Hydrologie und Wasserwirtschaft - Hydrologische Modellierung, Prof. Hinkelmann, TU Berlin

www.tu-berlin.de/fak6/iwawi/teachings/downloads/Hydrologische_Modellierung_V.pdf

Einordnung in die Niederschlags-Abfluss-Modellierung





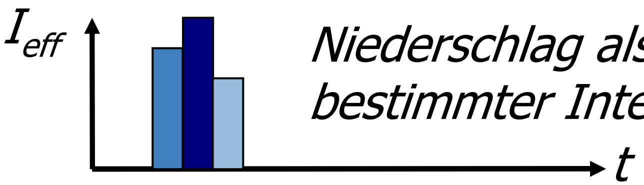
aus Dyck/Peschke (1995)

Impulsantwort als Modellkonzept für die Abflusskonzentration

Grundidee

- Die Ganglinie des Effektivniederschlags wird als eine Folge von diskreten Impulsen der Dauer Δt dargestellt (Eingangssignale des Systems)

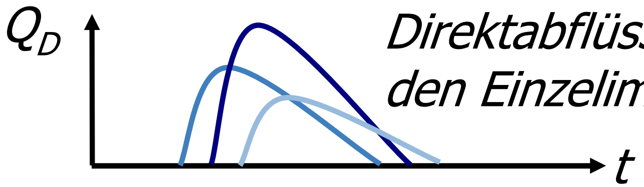
1



Niederschlag als Folge von Impulsen bestimmter Intensität und Dauer Δt

- Mittels einer für das System (Einzugsgebiet) charakteristischen Vorschrift („Übertragungsfunktion", „Systemoperator", „Antwortfunktion") kann für jeden Effektivniederschlagsimpuls die Systemantwort (Ausgangssignal, hier: Direktabfluss am Gebietsauslass) berechnet werden

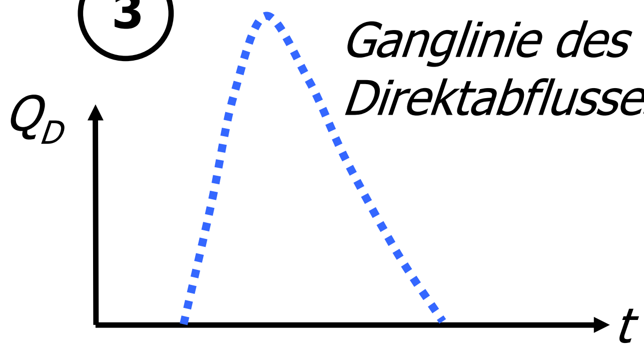
2



Direktabflüsse aus den Einzelimpulsen

- Die aus dem gesamten Niederschlagsereignis resultierende Ganglinie des Direktabflusses erhält man durch Überlagerung der Reaktionen auf die einzelnen Impulse

3



Ganglinie des Direktabflusses

Impulsantwort als Modellkonzept für die Abflusskonzentration

Grundprinzip 1: "Proportionalitäts- oder Verstärkungsprinzip"

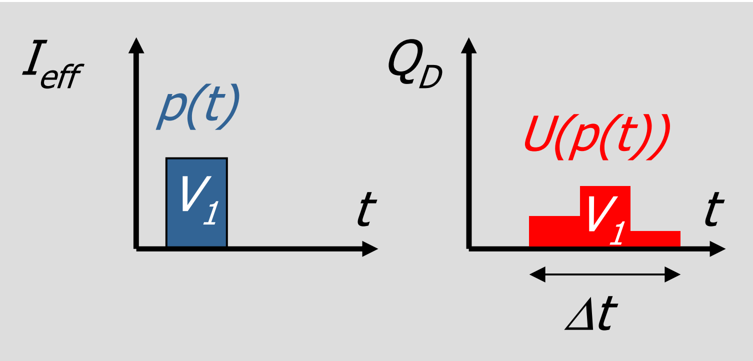
- Aus einem mit *k* multiplizierten Eingangssignal *p* folgt ein mit *k* multipliziertes Ausgangssignal

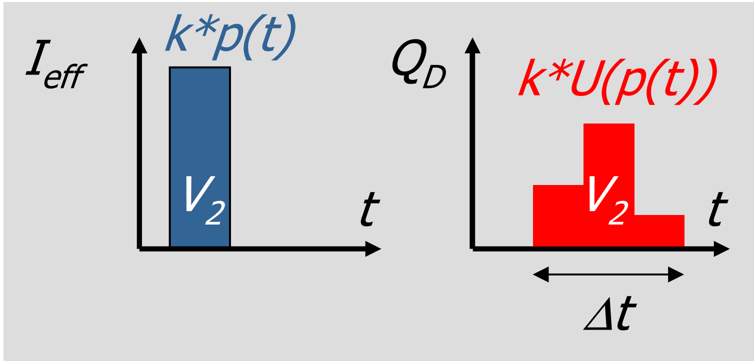
$$U(k*p(t)) = k*U(p(t))$$

U: Übertragungsfunktion
p(t): Eingangssignal, U(p(t)): Ausgangssignal
k: beliebige Konstante

→ Die Höhe des aus einem Effektivniederschlagsimpuls (I_{eff}) resultierenden Direktabflussimpulses (Q_D) hängt linear von der Höhe des Effektivniederschlagsimpulses ab

→ Form und Dauer der aus einem Effektivniederschlagsimpuls resultierenden Direktabflussganglinie sind v. der Effektivniederschlagsintensität unabhängig





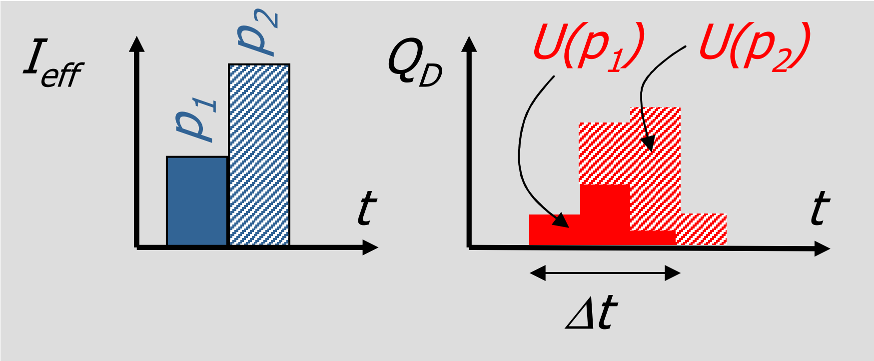
Es gilt die Volumenbilanz: $\int PI_{eff}\, dt = \int Q_D\, dt$ (keine permanente Speicherung)

Impulsantwort als Modellkonzept für die Abflusskonzentration

Grundprinzip 2: "Superpositions- oder Überlagerungsprinzip"

- Die Systemantworten mehrerer (z.B. zeitlich aufeinander folgender) Eingangsimpulse überlagern sich ungestört

$$U(p_1(t) + p_2(t)) = U(p_1(t)) + U(p_2(t))$$



→ Die Kombination von Proportionalitäts- und Superpositionsprinzip bezeichnet man als **"Linearitätsprinzip"**

$$U(k_1{*}p_1(t) + k_2{*}p_2(t)) = k_1{*}U(p_1(t)) + k_2{*}U(p_2(t))$$

Impulsantwort als Modellkonzept für die Abflusskonzentration

Grundprinzip 3: Zeitlich invariantes Systemverhalten

- Die Übertragungsfunktion ist zeitlich unveränderlich – ein identischer Impuls des Effektivniederschlags erzeugt immer die gleiche Direktabflussganglinie
- Daraus folgt u.a., dass:
  - die Übertragungsfunktion bei Veränderung der Gebietseigenschaften (Vegetation, Versiegelungsgrad etc.) ungültig wird
  - besondere Situationen (gefrorener Boden, Schneeschmelze) mit einer für „Normalbedingungen" gültigen Übertragungsfunktion nicht behandelt werden können

Weitere Grundannahme: Homogene Niederschlagsverteilung

- Die Ganglinie des Effektivniederschlags wird für das gesamte Einzugsgebiet als gültig angenommen
- Die Anwendung ist daher auf kleine Gebiete beschränkt oder erfordert eine Gliederung in Teileinzugsgebiete

Impulsantwort als Modellkonzept für die Abflusskonzentration

Schritte zur Anwendung von Impulsantwortverfahren

1. Bestimmen der Übertragungsfunktion *U* für das untersuchte Einzugsgebiet („Systemidentifikation")

2. Berechnung der Ganglinie des Direktabflusses am Gebietsauslass aus der Ganglinie des Effektivniederschlags mit Hilfe der bekannten Übertragungsfunktion

Methoden + *Anwendungen*

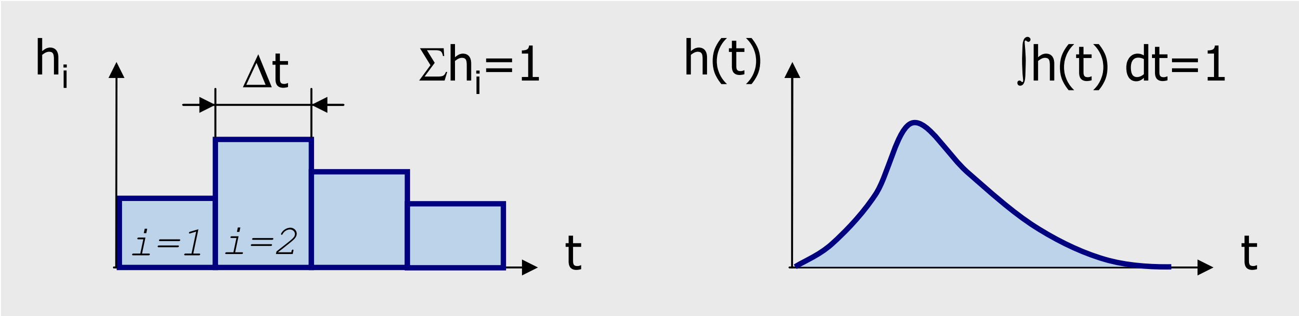
- Ableitung von *U* aus Gebietseigenschaften
  (z.B. Isochronen-Verfahren)

- Ableitung von *U* aus beobachteten Ein- und Ausgangssignalen (Black-Box-Methode)
  (z.B. Einheitsganglinien-Verfahren)

Definition der Einheitsganglinie (EGL)

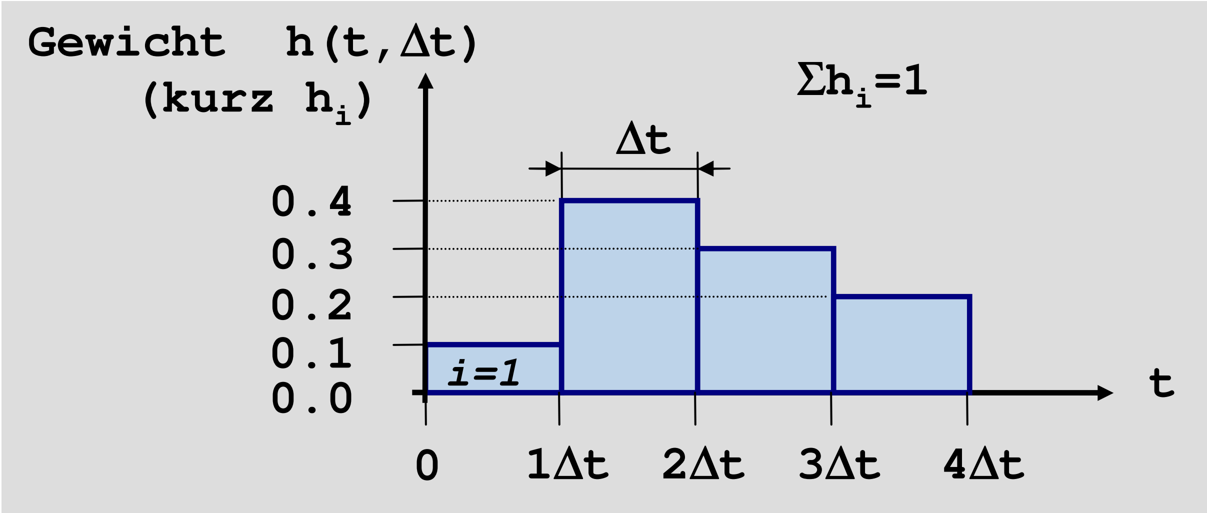
- Die Einheitsganglinie (Synonym: Δt-Impulsantwort) eines Einzugsgebiets ist definiert als die Ganglinie des direkten Abflusses von 1 mm, die aus einem Effektivniederschlag dieser Höhe mit der Einheitsdauer Δt resultiert.
- Anders ausgedrückt: Die Einheitsganglinie beschreibt, wie ein Effektiv-niederschlagsimpuls der Höhe 1 mm und der Dauer Δt über die Zeit verteilt zum Abfluss gelangt. (Übertragungsfunktion)

- Die EGL kann in diskreter oder kontinuierlicher Form angegeben werden:



- Die Ganglinie des direkten Abflusses eines Niederschlagsimpulses der Dauer Δt mit einer Niederschlagshöhe $\neq 1$ erhält man durch Multiplikation der EGL mit der veränderten Niederschlagshöhe [mm] ($\rightarrow$ siehe Proportionalitätsprinzip).

Interpretation einer diskreten Einheitsganglinie

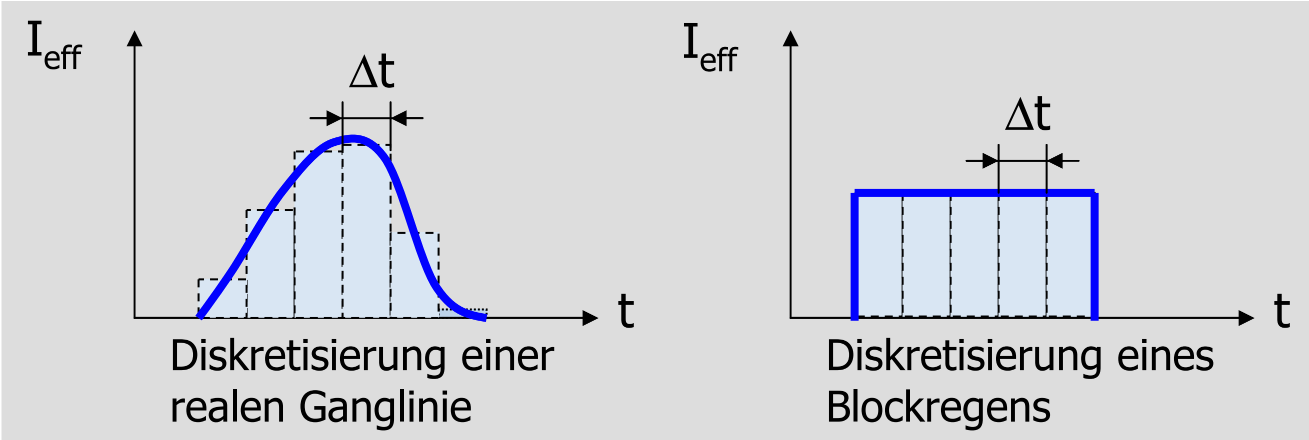


- Wird im Zeitintervall von t=0 bis t=1*Δt ein Effektivniederschlag der Höhe P [mm] gebildet, dann gelangt im Intervall von t=0 bis t=1*Δt der Anteil h_1*P, d.h. 10 % des Effektivniederschlagsvolumens, zum Abfluss.
- Im Intervall i=2 gelangt der Anteil h_2*P (d.h. 40%, da h_2=0.4) zum Abfluss.
- Im Zeitraum von t=0 bis t=4*Δt gelangt das gesamte Volumen des Effektivniederschlagsimpulses zum Abfluss, da $h_1+h_2+h_3+h_4=1.0$.
- Die ***Ordinaten der Einheitsganglinie*** können also als ***Gewichte*** interpretiert werden, die die Verteilung des aus einem Effektivniederschlags-impuls gebildeten Direktabflusses über die Zeit beschreiben.

Berechnen von $Q_D(t)$ aus $I_{eff}(t)$ in 3 Schritten ...

Schritt 1: Diskretisieren der Effektivniederschlagsganglinie

- Die Ganglinie der Effektivniederschlags-Intensität $I_{eff}(t)$ wird als Folge von Rechteckimpulsen der Dauer Δt dargestellt



- Innerhalb der Intervalle der Dauer Δt wird die Effektivniederschlags-Intensität als konstant angenommen
- Δt wird für die praktische Rechnung entsprechend der zeitlichen Diskretisierung der gegebenen Einheitsganglinie gewählt

Schritt 2: Umrechnen der Einheit des Effektivniederschlags

- Die Effektivniederschlagsintensität I_{eff} wird mit Hilfe der Fläche des Einzugsgebiets A_E in die Einheit des Direktabflusses umgerechnet

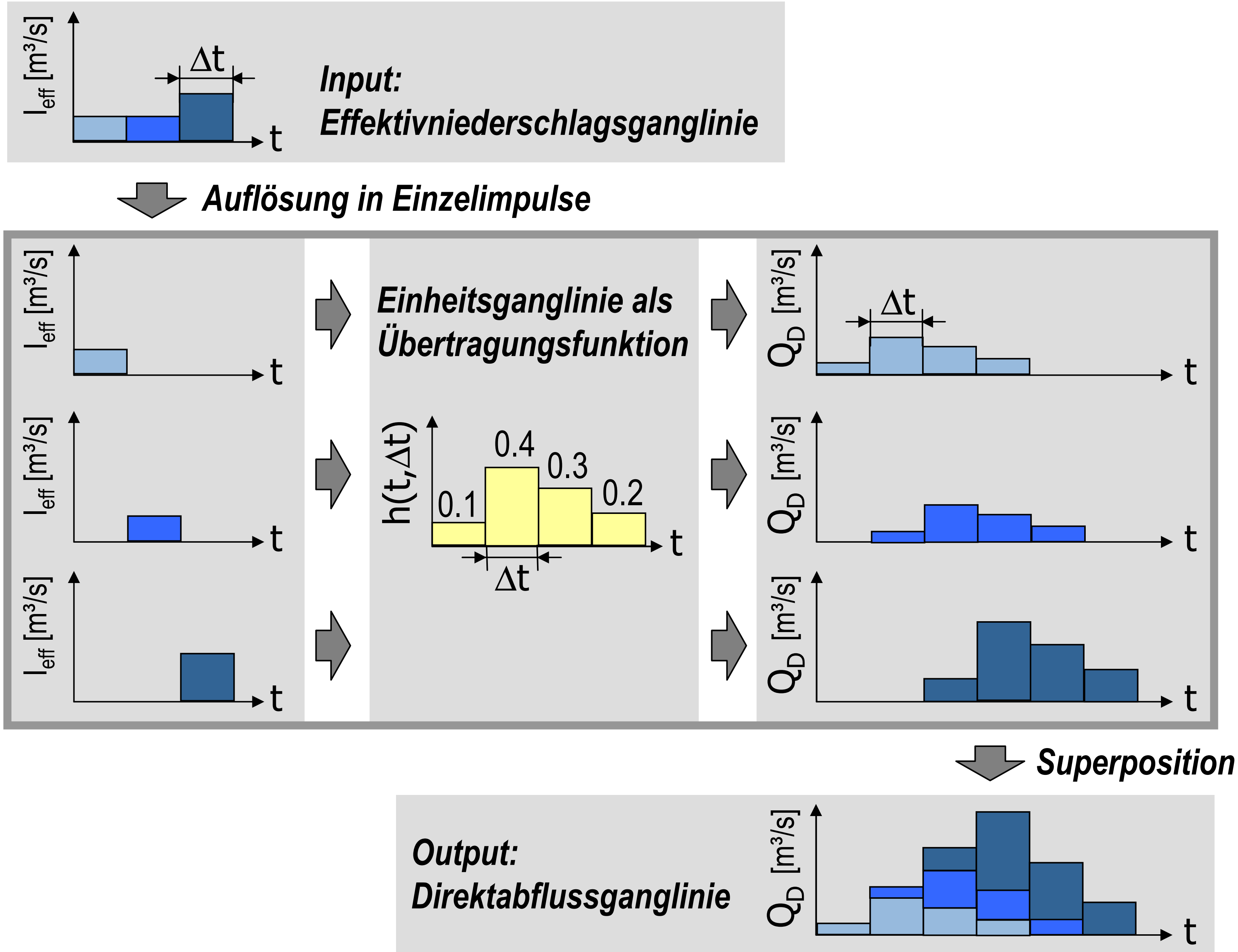
$$I_{eff}\,[L^3/T] = I_{eff}\,[L/T] * A_E\,[L^2]$$

L: Längeneinheit
T: Zeiteinheit

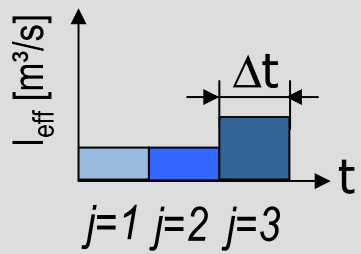
Bei Verwendung der üblichen Einheiten:

$$I_{eff}\left[\frac{m^3}{s}\right] = \frac{1}{3.6} * I_{eff}\left[\frac{mm}{h}\right] * A_E\,[km^2]$$

Schritt 3: Berechnen der Ganglinie des Direktabflusses



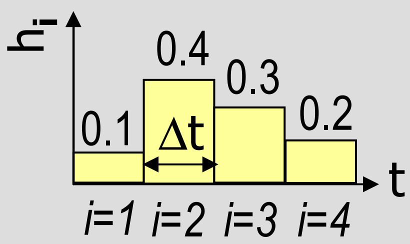
Schritt 3: Berechnen der Ganglinie des Direktabflusses

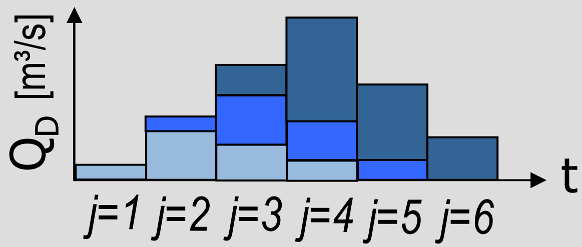


Input: Effektivniederschlags-ganglinie

Einheitsganglinie als Übertragungsfunktion

(n=4 Ordinaten)





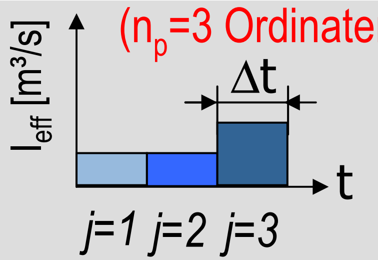
Output: Direktabfluss-ganglinie

Formel für den Direktabfluss:

$$QD_j = \sum_{i=1}^{n_h} \left(Ieff_{j-i+1} * h_i \right)$$

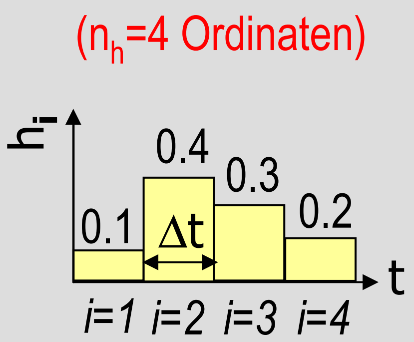
- j: *Index des Zeitschritts der Ganglinien von Effektivniederschlag und Direktabfluss*
- i: *Index des Zeitschritts der Einheitsganglinie*
- n_h: *Anzahl der Zeitschritte der Einheitsganglinie*

Dauer des Direktabflusses (Länge der Ganglinie $Q_D(t)$)



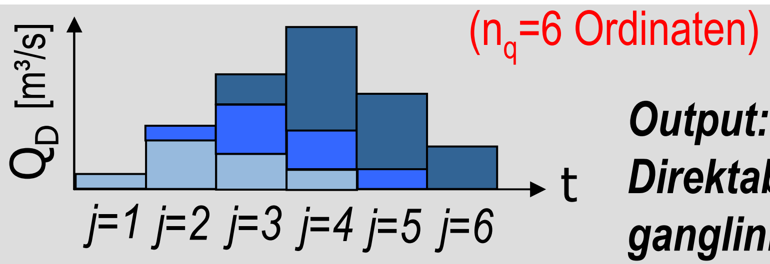
Input: Effektivniederschlags-ganglinie

Einheitsganglinie als Übertragungsfunktion



- Ein Niederschlagsimpuls kommt über „n_h" Zeitintervalle zum Abfluss (n_h= Anzahl Ordinaten der EGL) .
- Der erste Niederschlagsimpuls verursacht also eine Direktabflussganglinie der Länge $n_h * \Delta t$.
- Jeder weitere der insgesamt „n_p" Niederschlagsimpulse folgt mit einem Zeitversatz von Δt. Die Direktabfluss-ganglinie verlängert sich jeweils um Δt.

$\rightarrow$ Die Direktabflussganglinie besteht aus $n_q = n_h + n_p - 1$ Zeitintervallen und die Abflussdauer ist $(n_h + n_p - 1) * \Delta t$.



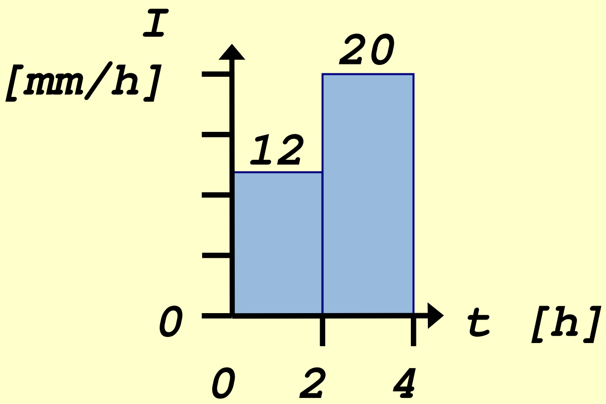
Output: Direktabfluss-ganglinie

Rechenbeispiel: Anwendung der Einheitsganglinie

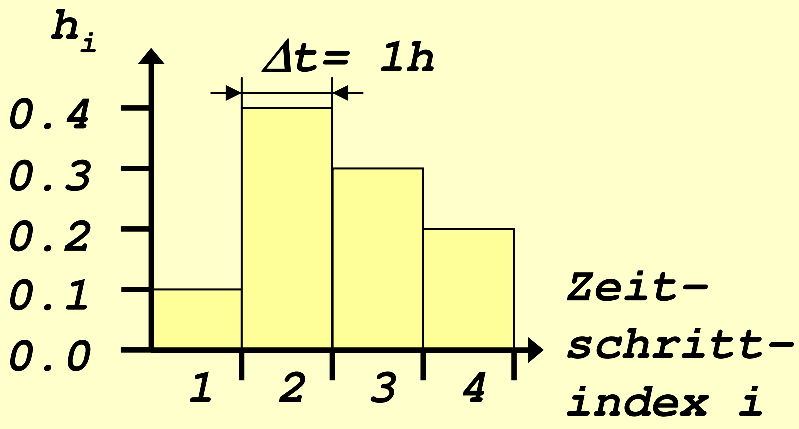
Ziel: Berechnen der Ganglinie $Q_D(t)$ aus einer Ganglinie des Niederschlags I(t) mittels gegebener, diskreter Einheitsganglinie

Gegeben:

Niederschlagsganglinie



diskrete Einheitsganglinie



weitere Angaben:

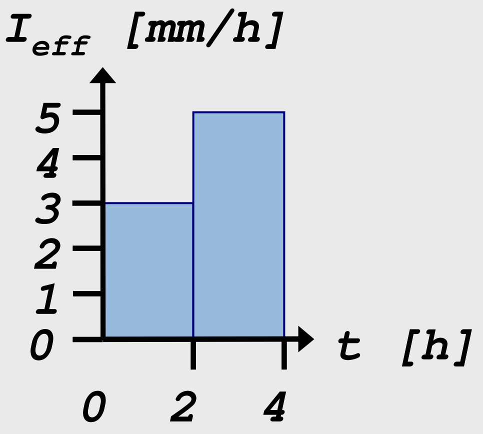
- *Größe des Einzugsgebietes A_E= 7.2 km²*
- *Abflussbeiwert ψ= 0.25 (zeitlich & räumlich konstant)*

Rechenbeispiel: Aufbereiten der Niederschlagsganglinie

1 Umrechnen in den Effektivniederschlag

$$I_{eff} = I * \psi$$

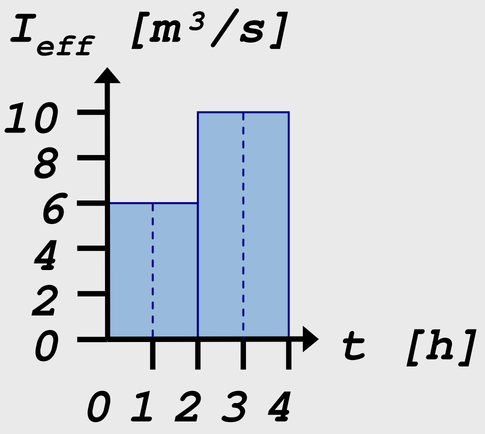
Zeitinter-vall [h]	I [mm/h]	I_{eff} [mm/h]
0-2	12	3
2-4	20	5



2 Diskretisieren in Intervalle Δt=1h entsprechend der Auflösung der EGL und Umrechnen von mm/h → m³/s

$$I_{eff}\left[\frac{m^3}{s}\right] = \frac{1}{3.6} * I_{eff}\left[\frac{mm}{h}\right] * A_E\,[km^2]$$

Zeitinter-vall [h]	I_{eff} [mm/h]	I_{eff} [m³/s]
0-1	3	6
1-2	3	6
2-3	5	10
3-4	5	10



Rechenbeispiel: Berechnen der Direktabflussganglinie

$$QD_j = \sum_{i=1}^{n_h} (Ieff_{j-i+1} * h_i)$$

j: *Zeitschrittindex der Ganglinien $I_{eff}(t)$ und $Q_D(t)$*
i: *Index des Zeitschritts der Einheitsganglinie*
n_h: *Anzahl der Zeitschritte der Einheitsganglinie*

Berechnen der Summenformel mittels Tabelle

Zeitschritt der Ganglinie $I_{eff}(t)$ →

Zeitschritt der Ganglinie $Q_D(t)$ ↓

	j=1	j=2	j=3	j=4	Spaltensumme
PI_{eff}	6m³/s	6m³/s	10m³/s	10m³/s	(QD_j [m³/s])
j=1	6*0.1	–	–	–	0.6
j=2	6*0.4	6*0.1	–	–	3.0
j=3	6*0.3	6*0.4	10*0.1	–	5.2
j=4	6*0.2	6*0.3	10*0.4	10*0.1	8.0
j=5	–	6*0.2	10*0.3	10*0.4	8.2
j=6	–	–	10*0.2	10*0.3	5.0
j=7	–	–	–	10*0.2	2.0

*ein Zeitschritt j dauert von (j-1)*Δt bis j*Δt*

(hier Δt=1h)

Rechenbeispiel: Kontrolle der Berechnung

Es muss gelten: $\int I_{eff}\, dt = \int Q_D\, dt$ (Effektivniederschlagsvolumen = Direktabflussvolumen)

Das Direktabflussvolumen V_{QD} ist:

$$V_{QD} = \sum_{j=1}^{n_q} (QD_j * \Delta t) = \Delta t * \sum_{j=1}^{n_q} QD_j$$

j: *Zeitschrittindex der Ganglinie*

n_q: *Anzahl der Zeitschritte der Ganglinie Q_D*

Δt: *Dauer eines Zeitschritts*

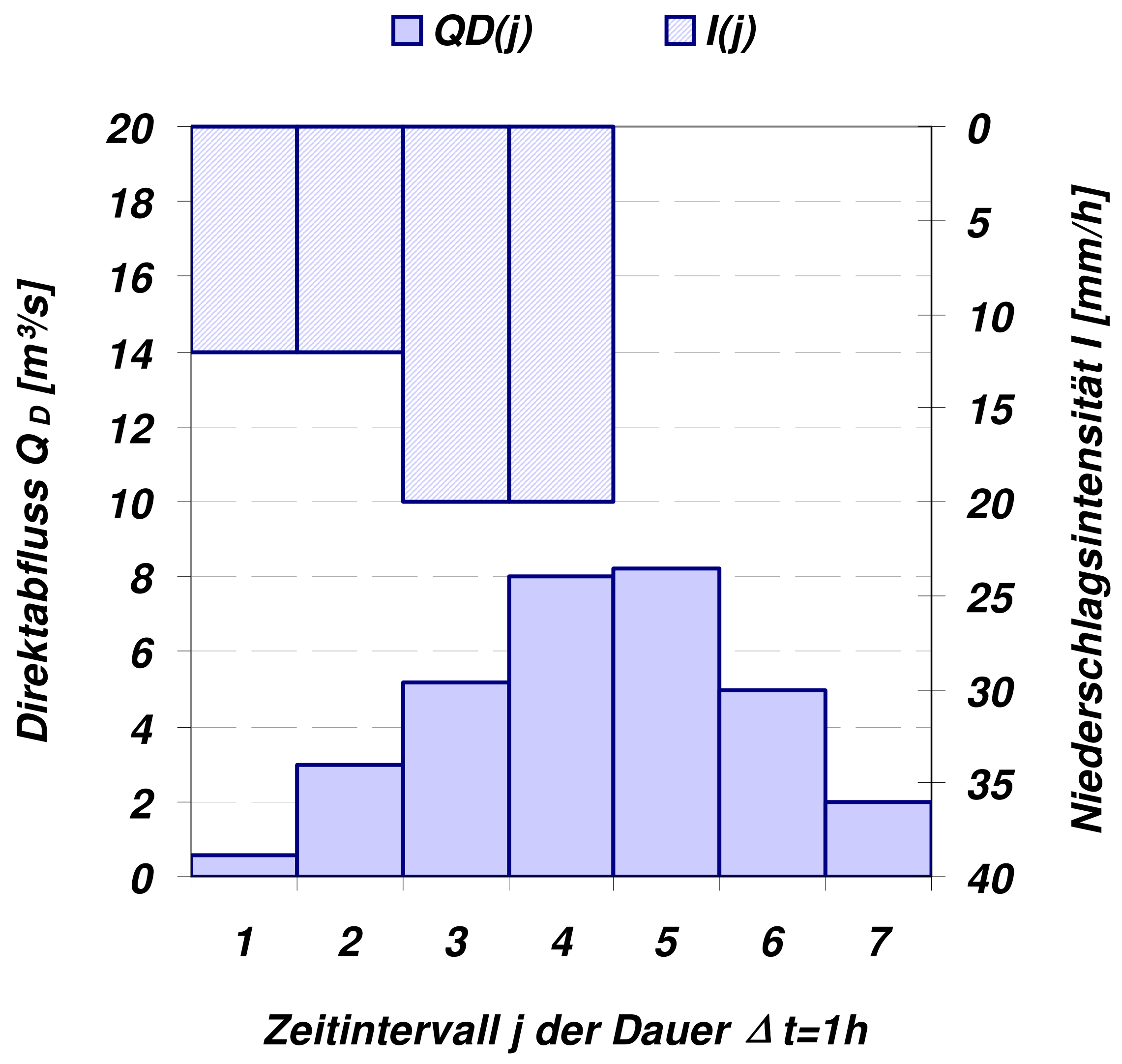
Effektivniederschlagsvolumen V_P (analog):

$$V_P = \Delta t * \sum_{j=1}^{n_p} Ieff_j$$

	QD_j [m³/s]	$Ieff_j$ [m³/s]
j=1	0.6	6
j=2	3.0	6
j=3	5.2	10
j=4	8.0	10
j=5	8.2	
j=6	5.0	
j=7	2.0	
	ΣQD_j[m³/s] = 32.0*3600s	$\Sigma Ieff_j$[m³/s] = 32.0*3600s

Hier: $V_{QD} = V_P = 32\ m^3/s * 3600\ s = 115200\ m^3$

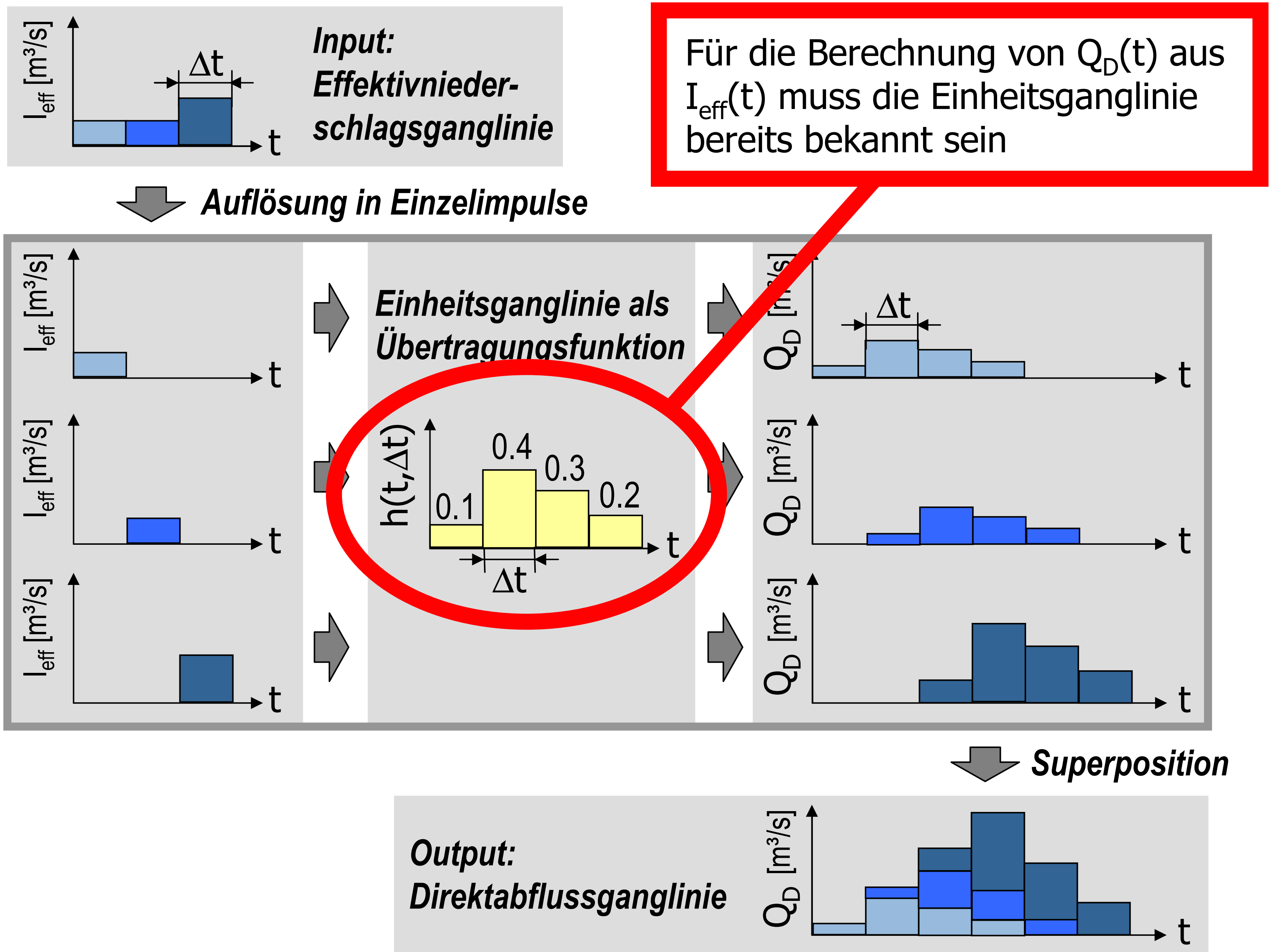
Rechenbeispiel: Ergebnis als Diagramm



Rückblick

1. Schema der Niederschlags-Abfluss-Modellierung (Abflussbildung → Abflusskonzentration → Wellenablauf)
2. Grundidee der Impulsantwortverfahren
3. Annahmen über das Systemverhalten
4. Definition der Einheitsganglinie
5. Anwendung einer gegebenen Einheitsganglinie (Berechnung der Ganglinie des Direktabflusses aus der Ganglinie des Effektivniederschlags)

Bestimmung der Einheitsganglinie



Methoden zur Bestimmung der Einheitsganglinie

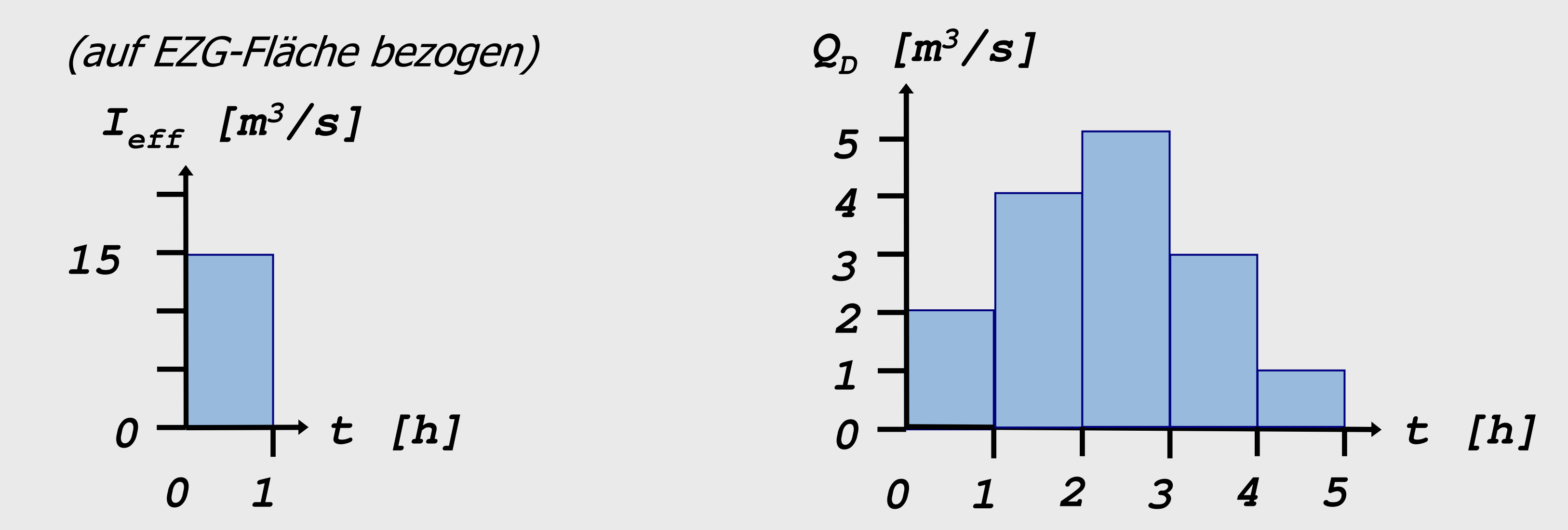
- Beim Einheitsganglinienverfahren werden die hydrologischen Prozesse, die zur Abflusskonzentration im Einzugsgebiet führen (Fließvorgänge), nicht explizit betrachtet
- Das Einzugsgebiet wird als „Black-Box“ betrachtet und die aus einem Effektivniederschlag resultierende Direktabflussganglinie wird als charakteristisches Systemverhalten interpretiert
- Die Einheitsganglinie (Übertragungsfunktion) muss also aus beobachteten Niederschlags-Abfluss-Ereignissen abgeleitet werden

Methoden zur Bestimmung der Einheitsganglinie

1. Auswertung des Direktabflusses aus einem einzelnen Niederschlagsimpuls
2. sog. „Direktes Verfahren“ (sehr fehleranfällig)
3. Kleinste-Quadrate-Verfahren zur Bestimmung der Ordinaten einer diskreten Einheitsganglinie
4. Darstellung der Einheitsganglinie als kontinuierliche Funktion (z.B. auf Basis der linearen Speicherkaskade) und Bestimmung der Funktionsparameter

Praxis

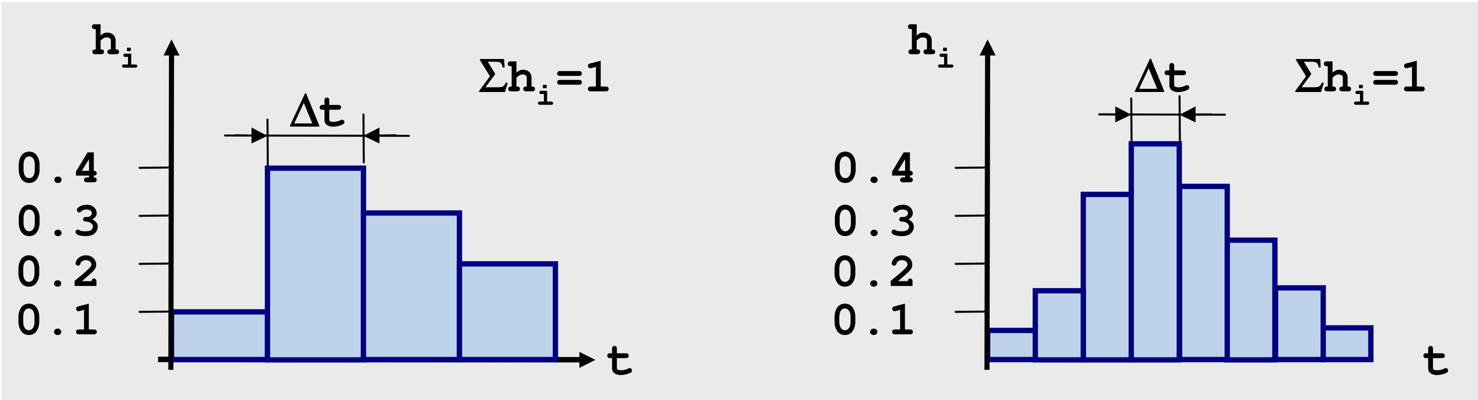
Auswertung von $Q_D(t)$ eines einzelnen Niederschlagsimpulses



- Es gilt die Volumenbilanz: $\Sigma QD_i * \Delta t = \Sigma Ieff_i * \Delta t$ (d.h. $\Sigma QD_i = \Sigma Ieff_i$)
- Im Intervall i der Dauer Δt beträgt das Direktabflussvolumen: $V_i = QD_i * \Delta t$
- Der Anteil des Direktabflussvolumens im Intervall i am Gesamtvolumen des Direktabflusses bzw. Niederschlags ist: $h_i = QD_i / \Sigma QD_i = QD_i / \Sigma Ieff_i$
- Die Werte h_i sind die gesuchten Ordinaten (Gewichte) der Einheitsganglinie (*hier* $h_1 = 2/15$, $h_2 = 4/15$, ..., $h_5 = 1/15$) und es gilt: $\Sigma h_i = 1$

Wahl der zeitlichen Diskretisierung der Einheitsganglinie

- Im Allgemeinen muss zur Berechnung einer diskreten Einheitsganglinie, zuerst eine geeignete zeitliche Diskretisierung festgelegt werden.



- Wie groß das Zeitintervall Δt zu wählen ist, hängt von der Konzentrationszeit des Einzugsgebietes ab. Allgemein gilt:
  - → Je schneller der Effektivniederschlag abfließt, umso kürzer muss Δt gewählt werden, z.B.:
    - A_E= 10...100 km², mittleres Gefälle > 15%: Δt= 1...2 h
    - A_E= 500...1000 km², mittleres Gefälle < 0.05%: Δt= 8...12 h
  - → Der Scheitel der Direktabflussganglinie sollte gut erfasst werden (ein zu großes Δt bedeutet einen Glättungseffekt).
  - → Der Anstieg der Ganglinie (Beginn des Direktabflusses bis Scheiteleintritt) sollte durch mind. 2 Ordinatenwerte abgebildet werden.

Ermitteln der Länge/Dauer der Einheitsganglinie

- Für die Anzahl der Zeitintervalle der Direktabflussganglinie gilt:

$$n_q = n_h + n_P - 1$$

n_h: Anzahl d. Zeitintervalle der Einheitsganglinie
n_q: Anzahl d. Zeitintervalle der Ganglinie $Q_D(t)$
n_P: Anzahl d. Zeitintervalle der Ganglinie $I_{eff}(t)$

- Die Anzahl der Zeitintervalle der gesuchten Einheitsganglinie ist somit:

$$n_h = n_q - n_P + 1$$

- Ein Niederschlagsimpuls kommt in der Zeit $n_h * \Delta t$ „vollständig" zum Abfluss

„direktes Verfahren": Prinzip und Beispiel

- Das „direkte Verfahren" verwendet unmittelbar die Summengleichung zur Berechnung des Direktabflusses:

$$QD_j = \sum_{i=1}^{n_h} (Ieff_{j-i+1} * h_i)$$

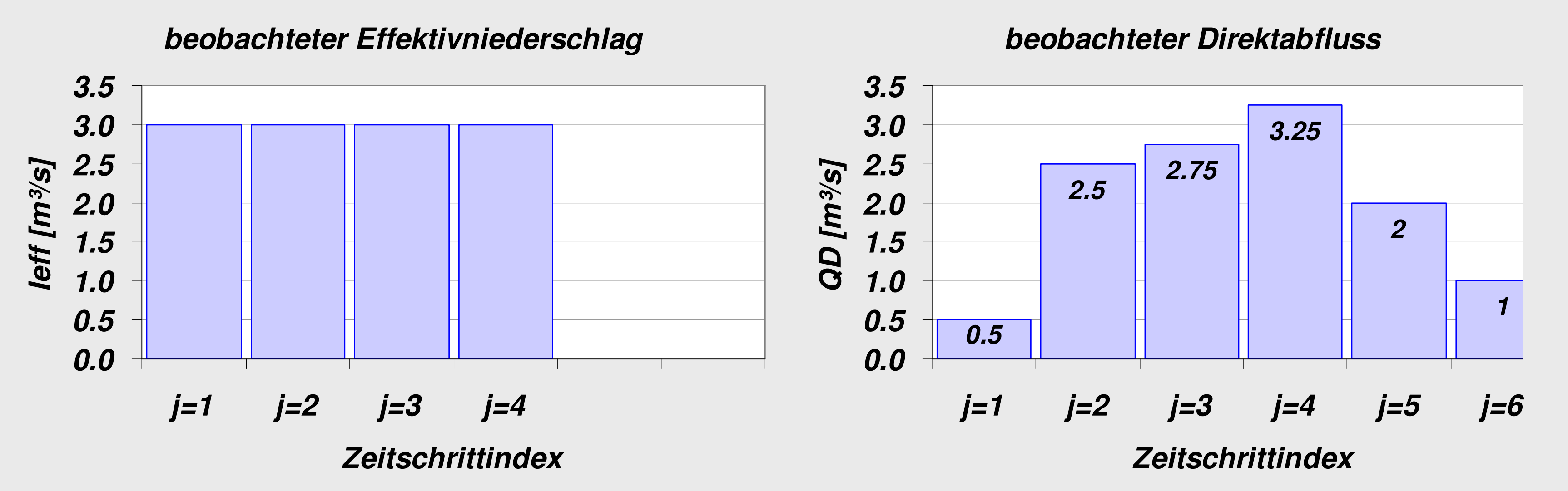
j: *Zeitschrittindex der Ganglinien $I_{eff}(t)$ und $Q_D(t)$*

i: *Index des Zeitschritts der Einheitsganglinie*

n_h: *Anzahl der Zeitschritte der Einheitsganglinie*

- Ist die Länge der Einheitsganglinie (n_h) bekannt, dann können die h_i ($i=1...n_h$) anhand bekannter Werte QD_j und $Ieff_j$ berechnet werden

Beispieldaten:



„direktes Verfahren": Prinzip und Beispiel

Die Einheitsganglinie hat im Beispiel $n_h = n_q - n_P + 1 = 6-4+1 = 3$ Ordinaten

Nach der Summengleichung für den Direktabfluss muss gelten:

$$
\begin{aligned}
Q_1 &= I_1 * h_1 \boxed{+ I_0 * h_2 + I_{-1} * h_3} \\
Q_2 &= I_2 * h_1 + I_1 * h_2 \boxed{+ I_0 * h_3} \\
Q_3 &= I_3 * h_1 + I_2 * h_2 + I_1 * h_3 \\
Q_4 &= I_4 * h_1 + I_3 * h_2 + I_2 * h_3 \\
Q_5 &= \boxed{I_5 * h_1 +} I_4 * h_2 + I_3 * h_3 \\
Q_6 &= \boxed{I_6 * h_1 + I_5 * h_2 +} I_4 * h_3
\end{aligned}
$$

Terme fallen weg, da kein Niederschlag vor dem Zeitschritt j=1 fällt (I=0)

Terme fallen weg, da kein Regen nach Zeitschritt j=4 fällt (I=0)

- Es stehen 6 Gleichungen für die Bestimmung der 3 Unbekannten h_1, h_2, h_3 zur Verfügung.
- Die Nebenbedingung $\Sigma h = h_1+h_2+h_3 = 1$ kommt als weitere Gleichung hinzu.

→ Das Gleichungssystem ist überbestimmt!

Ausweg 1:

Gleichungen weglassen

→ „direktes Verfahren"

Ausweg 2:

$h_1,\ldots,h_3$ so optimieren, dass Abweichung zwischen beobachteten und gemessenen Q_j-Werten minimal ist → siehe Kleinste-Quadrate-Verfahren

„direktes Verfahren": Lösung für das Beispiel

gegebene Ganglinien

Zeitindex	I_{eff} [m³/s]	Q_D [m³/s]
j=1	3	0.5
j=2	3	2.5
j=3	3	2.75
j=4	3	3.25
j=5		2.0
j=6		1.0

Bestimmung der h_i aus Gleichung 1 & 2

1. Gleichung: $Q_1 = I_1 * h_1$

$\rightarrow h_1 = Q_1 / I_1$

2. Gleichung: $Q_2 = I_2 * h_1 + I_1 * h_2$

$\rightarrow h_2 = Q_2 / I_1 - (I_2 * h_1) / I_1$

$\rightarrow h_2 = Q_2 / I_1 - (I_2 * Q_1) / I_1^2$

Nebenbedingung: $h_3 = 1 - h_1 - h_2$

Lösung

h_1= 0.5/3 = 0.16666

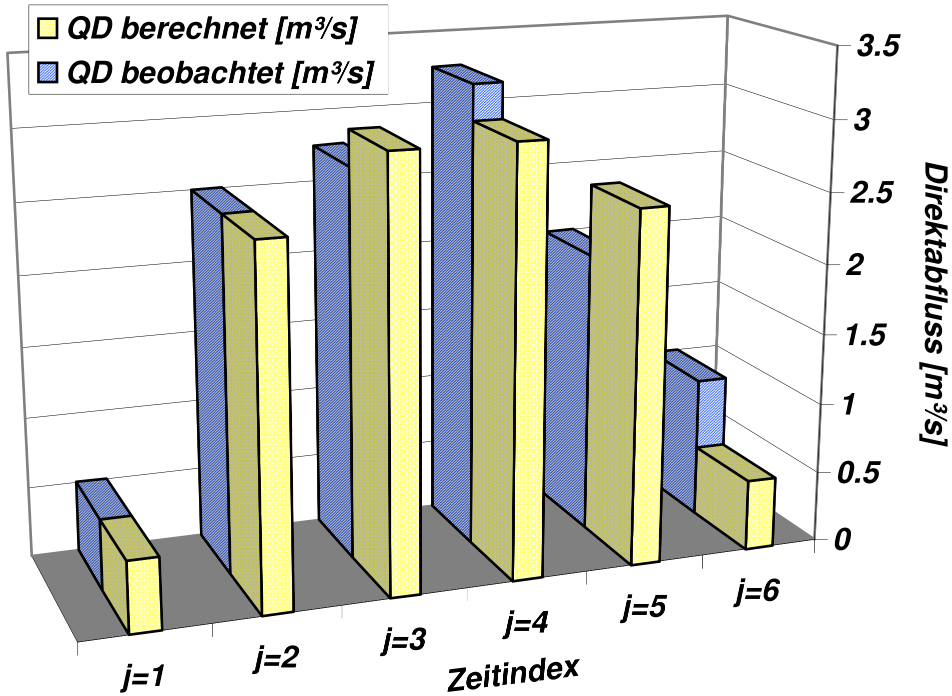
h_2= 2.5/3 - 3*0.5/9 = 0.66666

h_3= 1 - 0.16666 - 0.66666 = 0.16666

„direktes Verfahren": Probleme der Methode

Anwendung der Lösung zeigt Problem der Methode

- In der Realität lassen sich nie alle beobachteten QD_j exakt mit Hilfe der Einheitsganglinie aus den $Ieff_j$ ableiten
- Gesucht sind also Werte für h_i, die möglichst kleine Abweichung zwischen beobachteten und berechneten QD_j liefern



Problem: Zur Bestimmung der Modellparameter (h_i) nutzt das „direkte Verfahren" nur ein Teil der vorhandenen Informationen (hier die ersten beiden QD_j-Werte, da übrige Gleichungen weggelassen werden)

Folge: Für die ersten beiden QD_j-Werte stimmen beobachtete und berechnete Werte exakt überein. Fehler werden auf übrige berechnete QD_j verteilt!

$\rightarrow$ Fehlerfortpflanzung, wenn für Anpassung genutzte QD_j fehlerbehaftet
$\rightarrow$ Subjektivität: Welche QD_j nutzt man für Ermittlung der h_i ?

Anpassung der h_i mittels Kleinste-Quadrate-Verfahren

Ziel des Verfahrens

- Bestimme die Modellparameter (h_i) so, dass beobachtete und berechnete Direktabflüsse (QD_j) möglichst wenig voneinander abweichen
- Dabei sollen alle vorhandenen QD_j-Werte einbezogen werden

Mathematische Formulierung der Optimierungsaufgabe (Kleinste-Quadrate-V.):

$$S = \sum_{j=1}^{n_q} (QD_j - q_j)^2 \overset{!}{=} \min$$

S: *zu minimierende Zielfunktion*

n_q: *Index des Zeitschritts der Direktabflussganglinie*

QD_j: *berechnete Direktabflüsse*

q_j: *beobachtete Direktabflüsse*

Die QD_j berechnen sich wieder nach der Summenformel:

$$QD_j = \sum_{i=1}^{n_h} (Ieff_{j-i+1} * h_i)$$

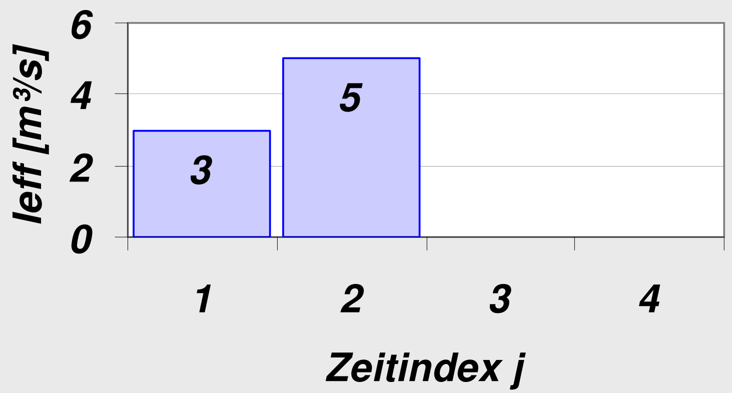
j: *Zeitschrittindex der Ganglinien $I_{eff}(t)$ und $Q_D(t)$*

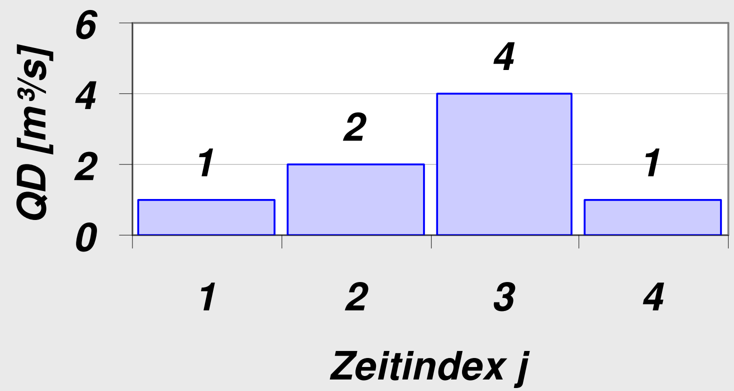
i: *Index des Zeitschritts der Einheitsganglinie*

n_h: *Anzahl der Zeitschritte der Einheitsganglinie*

Anwendung des K.-Q.-V. am Beispiel

Beispieldaten





Die gesuchte Einheitsganglinie hat $n_h = n_q - n_p + 1 = 3$ Ordinaten

Aus der Summenformel für die QD_j folgt:

$$Q_1 = I_1 * h_1$$

$$Q_2 = I_2 * h_1 + I_1 * h_2$$

$$Q_3 = I_2 * h_2 + I_1 * h_3$$

$$Q_4 = I_2 * h_3$$

Außerdem gilt

$$h_1 + h_2 + h_3 = 1$$

Die Zielfunktion für das Beispiel lautet somit:

$$S = (I_1 * h_1 - q_1)^2 + (I_2 * h_1 + I_1 * h_2 - q_2)^2 + (I_2 * h_2 + I_1 * (1 - h_1 - h_2) - q_3)^2 + (I_2 * (1 - h_1 - h_2) - q_4)^2 =! \ \min$$

Anwendung des K.-Q.-V. am Beispiel

Die Zielfunktion

$$S= (I_1*h_1-q_1)^2 + (I_2*h_1+I_1*h_2-q_2)^2 + (I_2*h_2+I_1*(1-h_1-h_2)-q_3)^2+(I_2*(1-h_1-h_2)-q_4)^2$$

ist eine Funktion von 2 Veränderlichen $S(h_1,h_2)$.

Notwendiges Kriterium für ein Minimum von $S(h_1,h_2)$ ist, dass alle partiellen Ableitungen Null sind:

$$\delta S/\delta h_1= 0$$
$$\delta S/\delta h_2= 0$$

Die optimalen Werte für h_1 und h_2 ergeben sich als Lösung des Gleichungssystems der partiellen Ableitungen.

Anwendung des K.-Q.-V. am Beispiel

Als partielle Ableitungen von

$$S = (I_1*h_1-q_1)^2 + (I_2*h_1+I_1*h_2-q_2)^2 + (I_2*h_2+I_1*(1-h_1-h_2)-q_3)^2+(I_2*(1-h_1-h_2)-q_4)^2$$

nach den einzelnen h_i ergeben sich (Kettenregel):

$$\delta S/\delta h_1 = 2*(I_1*h_1-q_1)*I_1+2*(I_2*h_1+I_1*h_2-q_2)*I_2$$
$$-2*(I_2*h_2+I_1*(1-h_1-h_2)-q_3)*I_1-2*(I_2*(1-h_1-h_2)-q_4)*I_2$$

$$\delta S/\delta h_2 = 2*(I_2*h_1+I_1*h_2-q_2)*I_1+2*(I_2*h_2+I_1*(1-h_1-h_2)-q_3)*(I_2-I_1)-2*(I_2*(1-h_1-h_2)-q_4)*I_2$$

Nullsetzen der partiellen Ableitungen und Sortieren der unbekannten h_i auf die linke Seite ergibt ein lineares Gleichungssystem (LGS):

$$(4*I_1^2+4*I_2^2)*\mathbf{h_1}+(2*I_2*I_1-2*I_1*(I_2-I_1)+2*I_2^2)*\mathbf{h_2}$$
$$= 2*q_1*I_1-2*q_2*I_2-2*(I_1-q_3)*I_1-2*(I_2-q_4)*I_2$$
$$(2*I_2*I_1-2*I_1*(I_2-I_1)+2*I_2^2)*\mathbf{h_1}+(2*I_1^2+2*(I_2-I_1)^2+2*I_2^2)*\mathbf{h_2}$$
$$= 2*q_2*I_1+2*(I_1-q_3)*(I_2-I_1)-2*(I_2-q_4)*I_2$$

LGS in Matrix-Schreibweise:

$$\begin{pmatrix} 4*I_1^2+4*I_2^2 & 2*I_2*I_1-2*I_1*(I_2-I_1)+2*I_2^2 \\ 2*I_2*I_1-2*I_1*(I_2-I_1)+2*I_2^2 & 2*I_1^2+2*(I_2-I_1)^2+2*I_2^2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \mathbf{h_1} \\ \mathbf{h_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2*q_1*I_1-2*q_2*I_2-2*(I_1-q_3)*I_1-2*(I_2-q_4)*I_2 \\ 2*q_2*I_1+2*(I_1-q_3)*(I_2-I_1)-2*(I_2-q_4)*I_2 \end{pmatrix}$$

Anwendung des K.-Q.-V. am Beispiel

Einsetzen der bekannten Werte:

$$\begin{pmatrix} 138 & 68 \\ 68 & 76 \end{pmatrix} x \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 60 \\ 56 \end{pmatrix}$$

…und Lösung (z.B. mit Gauss'schem Algorithmus):

$$\begin{aligned} h_1 &= 0.1282 \\ h_2 &= 0.6221 \\ h_3 = 1-h_1-h_2 &= 0.2497 \end{aligned}$$

Die QD_j berechnen sich wieder nach der Summenformel:

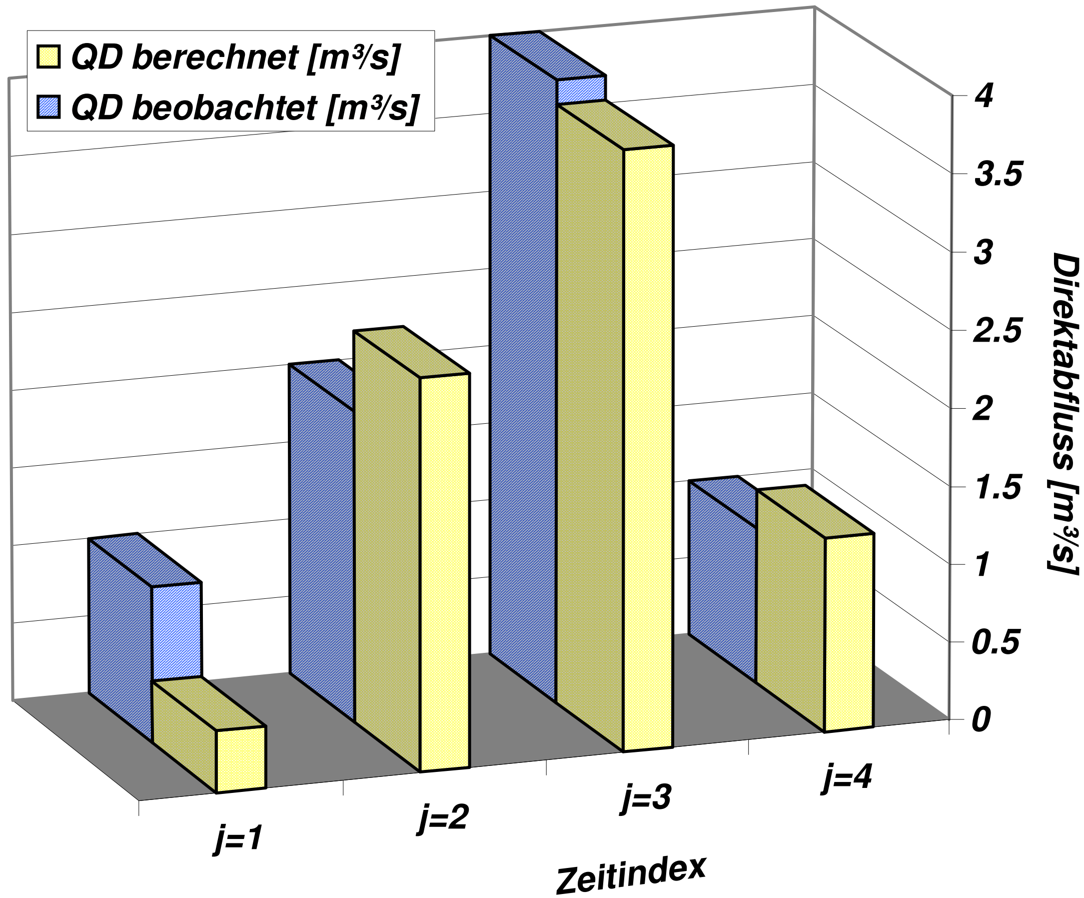
$$QD_j = \sum_{i=1}^{n_h} (Ieff_{j-i+1} * h_i)$$

j: Zeitschrittindex der Ganglinien $I_{eff}(t)$ und $Q_D(t)$
i: Index des Zeitschritts der Einheitsganglinie
n_h: Anzahl der Zeitschritte der Einheitsganglinie

$$QD_j = \begin{matrix} 0.38 \\ 2.51 \\ 3.86 \\ 1.25 \end{matrix}$$

Anwendung des K.-Q.-V. am Beispiel

Vergleich der gemessenen mit der berechneten Ganglinie des Direktabflusses



→ Der Fehler verteilt sich über alle Ordinaten der Ganglinie.

→ Der Gesamtfehler (Summe der Fehlerquadrate) ist minimal.

Praktische Auswertung von N-A-Ereignissen

- Jedes Niederschlags-Abfluss-Ereignis ist verschieden! (z.B. Verschlämmung der Bodenoberfläche, Eis, Zustand der Vegetation, Gewässerverkrautung...)
- Solche Einflüsse bleiben in der Einheitsganglinie unberücksichtigt!
- Bestimmt man die Einheitsganglinie für mehrere Ereignisse erhält man unterschiedliche Ergebnisse!

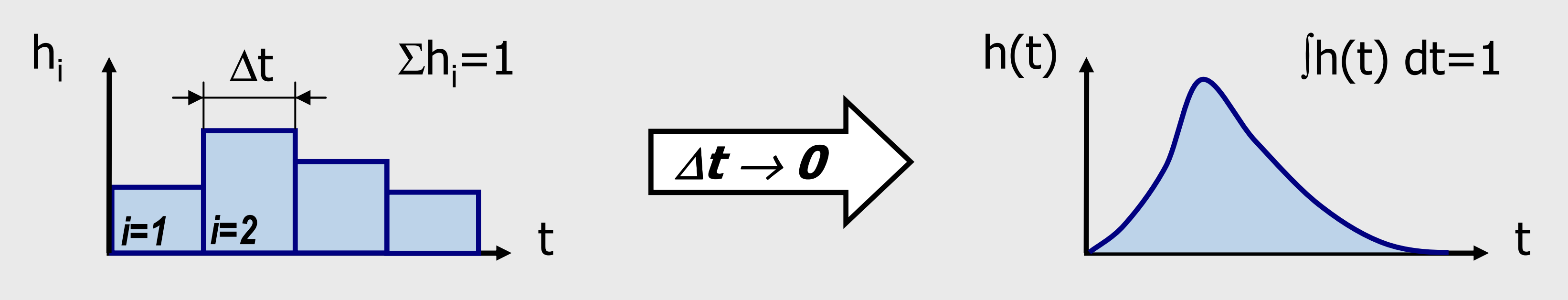
Mögliche Auswege:

→ verschiedene Einheitsganglinien für typische Gebietszustände anpassen (setzt genügend Beobachtungen voraus)

→ Berechnen einer mittleren Einheitsganglinie nachdem die Scheitel der einzelnen EGL übereinander geschoben wurden

Einheitsganglinie als kontinuierliche Funktion

Darstellung der Einheitsganglinie als analytische Funktion



Der Übergang von der diskreten zur kontinuierlichen Form der Einheitsganglinie entspricht der Annäherung $\Delta t \rightarrow 0$. Das Integral der Funktion im Bereich t=0 bis $t=\infty$ ist 1.

Die Funktion h(t) bezeichnet man als „Momentaneinheitsganglinie" oder „Instantaneous Unit Hydrograph" (IUH). Sie entspricht der Direktabflussganglinie infolge eines Niederschlagsimpulses mit dem Volumen 1.0 und der Dauer $\Delta t=0$ (Intensität $\rightarrow \infty$; „Dirac'scher Stoß", „Momentaneinheitsimpuls").

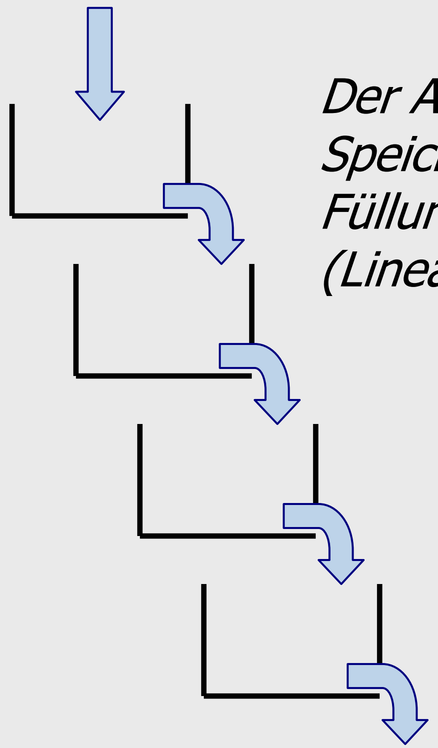
An die Stelle der bisher verwendeten Summenformel zur Berechnung der Direktabflussganglinie tritt das „Faltungsintegral":

$$Q_D(t) = \int_{\tau=0}^{t} I_{eff}(\tau) * h(t-\tau)\; d\tau$$

Einheitsganglinie als kontinuierliche Funktion

Als Struktur der Funktion h(t) hat sich die Antwortfunktion der linearen Speicherkaskade bei Eingabe eines Momentaneinheitsimpulses bewährt:

Momentaneinheitsimpuls als Input zur Zeit t=0



Der Abfluss jedes Speichers ist dessen Füllung proportional (Linearspeicher)

Impulsantwort der linearen Speicherkaskade

$$h(t) = \frac{1}{K * (n-1)!} * \left(\frac{t}{K}\right)^{n-1} * e^{-t/K}$$

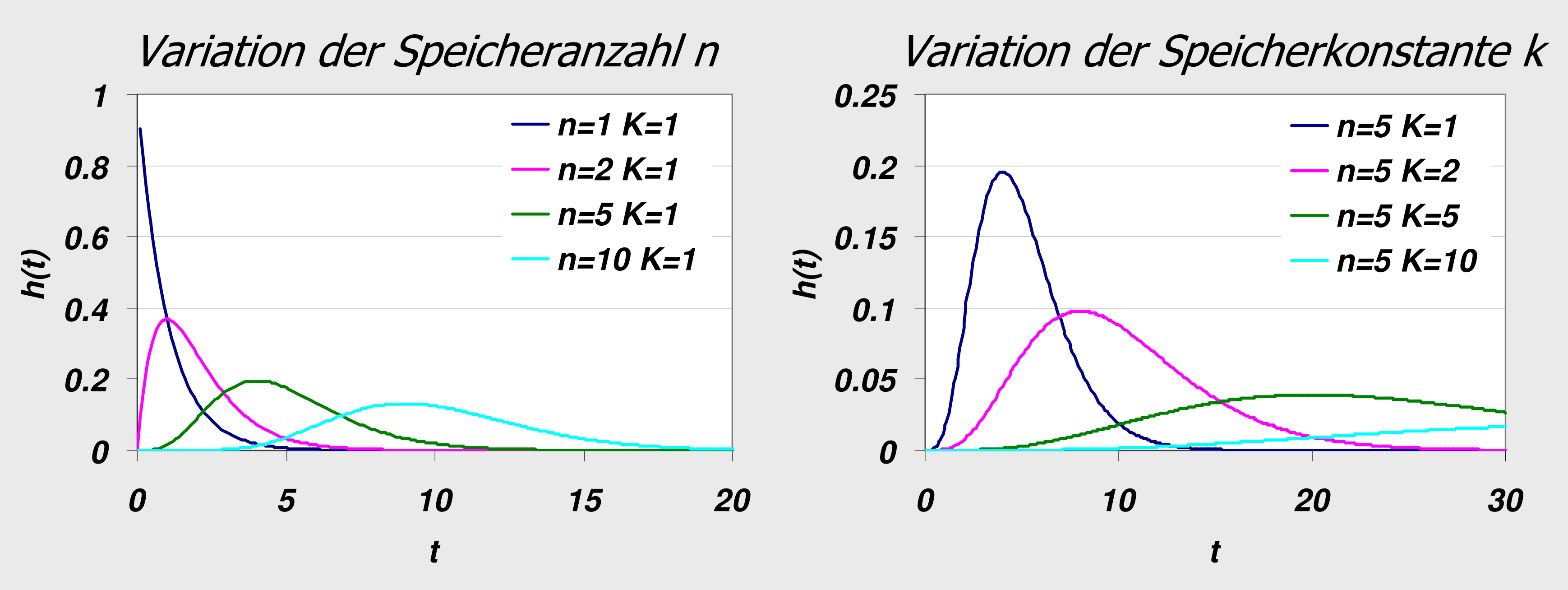
Die Funktion besitzt 2 freie Parameter:

- n: Anzahl der Einzellinearspeicher
- K: Speicherkonstante (für alle Speicher gleich)

Lässt man für „n" gebrochene Werte zu, tritt an die Stelle des Fakultäts-Terms "(n-1)!" die Gammafunktion Γ(n).

Einheitsganglinie als kontinuierliche Funktion

Einfluss der Parameter n und k auf den Funktionsverlauf h(t):



- Die Einheitsganglinie erhält man in diesem Fall durch Anpassung der beiden Parameter n und k, so dass berechnete und beobachtete Direktabflussganglinie möglichst gut übereinstimmen.
- Ein mögliches einfaches Parameterschätzverfahren ist hier die Momentenmethode.

Abspann

Merkpunkte unter:

http://uni-potsdam.de/u/Geooekologie/institut/hydrologie/download.html

Was fand ich besonders gut?

Was hat mir gar nicht gefallen?

Was war überflüssig?

Was hat gefehlt, hätte ich mir gewünscht?

Hausaufgaben: mehr….weniger

Geschwindigkeit: schneller….langsamer

Niveau: leichter….schwerer

Online-Evaluation:

http://www.uni-potsdam.de/evaluation

Kennnummer: 85477